بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المخلوقين محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ، يسرني أن أقدم لكم هذا العمل المتواضع وهو عبارة على ملخصات مع تقنيات الرياضيات لمستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية مجمعة في كتاب واحد

وهي للأستاذ حميد بوعيون

sefroumaths.site.voila.fr

تجميع وترتيب

ALMOHANNAD

النهايات والإتصال

I) تذكير

1) الأشكال الغير محددة:

$+\infty-\infty$	$\infty\times 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$+\infty+a=+\infty$

$-\infty+a=-\infty$

$+\infty+\infty=+\infty \qquad (a\in\mathbb{R})$

$-\infty-\infty=-\infty$

$+\infty-\infty$ ش غ محدد

$a\times\infty=\infty \qquad (a\neq 0)$

$\infty\times\infty=\infty$

$0\times\infty$ ش غ محدد

$\frac{\infty}{a}=\infty \qquad \frac{a}{\infty}=0 \qquad \frac{a\neq 0}{0}=\infty$

$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$ ش غ محدد

3) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

a) $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim\limits_{\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) **ملاحظة:** $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases} x=\sqrt{x^2};x\geq 0 \\ x=-\sqrt{x^2};x\leq 0\end{cases}$

4) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

5) الاتصال.

a) لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0} f(x)$ إذا وجدنا أن $\lim\limits_{x_0} f(x)=f(x_0)$ فإن f متصلة في x_0 .

b) إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مركب دوال متصلة في غالب الأحيان.

6) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفةفي x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0} f(x)$ إذا وجدنا $\lim\limits_{x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا g بالاتصال في x_0 معرف بما يلي: $\begin{cases} g(x)=f(x) \ ,x\neq x_0 \\ g(x_0)=l\end{cases}$

7) النهايات والترتيب.

a) إذا كان $|f(x)-l|\leq g(x)$ بجوار x_0 و $\lim\limits_{x_0} g(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x_0} f(x)=l$

b) إذا كان $f(x)\leq g(x)$ بجوار x_0 و $\lim\limits_{x_0} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x_0} g(x)=+\infty$

c) إذا كان $f(x)\leq g(x)$ بجوار x_0 و $\lim\limits_{x_0} g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x_0} f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ بجوار x_0 و $\lim\limits_{x_0} g(x)=\lim\limits_{x_0} h(x)=l$ فإن $\lim\limits_{x_0} f(x)=l$

II) صورة مجال بدالة متصلة.

1) a) صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

b) صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

2) a) إذا كانت f متصلة وتزايدية فإن:

*) $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ *) $f(]a,b])=\left]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\right]$.

b) إذا كانت f متصلة وتناقصية فإن:

*) $f([a,b])=[f(b),f(a)]$ *) $f(]a,b[)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$.

3) مبرهنة القيم الوسيطية

a) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن $(\exists c\in[a,b]): f(c)=\lambda$

b) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b)<0$ فإن $(\exists c\in\,]a,b[): f(c)=0$

يعني المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في $]a,b[$

ملاحظة: *) إذا كان $f(a)\cdot f(b)\leq 0$ فإن $c\in[a,b]$.

*) إذا كانت f رتيبة قطعا فإن العدد c وحيد.

III) الدالة العكسية

1) إذا كانت:

*) f متصلة على مجال I

*) f رتيبة قطعا على I

*) $f(I)=J$

فإن f تقابل من I نحو J

وبالتالي f تقبل دالة عكسية $f^{-1}:J\to I$ ولدينا:

$(\forall x\in J)(\forall y\in I): f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

2) a) الدالة f^{-1} متصلة على J

b) الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على J ولها نفس رتابة الدالة f .

c) في م.م.م المنحنيان C_f و $C_{f^{-1}}$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta): y=x$.

3) اشتقاق الدالة f^{-1} .

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$

و $(\forall x\in J): \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

IV) دالة الجذر ن الرتبة n $(n\in\mathbb{N}^*)$

1) تعريف: لكل x من $\mathbb{R}^+$ العدد $\sqrt[n]{x}$ هو العدد y من IR^+ الذي يحقق $y^n=x$.

مثال: *) $\sqrt[4]{16}=2$ لأن $2^4=16$ و $2\geq 0$.

*) $(-2)^4=16$ لكن $\sqrt[4]{16}\neq -2$ لأن $-2\notin\mathbb{R}^+$

2) خاصيات

a) الدالة $\sqrt[n]{\ }$ معرفة على $\mathbb{R}^+$ 　 b) $(\forall x\in\mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x}\geq 0$

c) $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+)$: *) $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$
*) $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$.

d) $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+)$: *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n<y^n\Leftrightarrow x<y$.

e) إذا كان n فردي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R})$: *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n<y^n\Leftrightarrow x<y$

f) إذا كان n زوجي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R})$: *) $x^n=y^n\Leftrightarrow |x|=|y|$
*) $x^n<y^n\Leftrightarrow |x|<|y|$

g) *) $(\forall x\geq 0).\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

*) إذا كان n زوجي $(\forall x\in IR): \sqrt[n]{x^n}=|x|$

h) ليكن n و p من IN^* و a و b من $\mathbb{R}^+$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$

*) $(b>0)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$

i) *) $(n\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{Z})$ $(\forall x>0)$: $x^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{x^p}$

*) إذا كان p زوجي: $(\forall x\in\mathbb{R}): \sqrt[n]{x^p}=|x|^{\frac{p}{n}}$.

ملاحظة:

1) إذا كان $xy>0$ فإن $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{|x|}\cdot\sqrt[n]{|y|}$ و $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{|y|}}$

2) *) $(\forall x\geq 0): \sqrt[3]{x^3}=x$ 　 $\begin{cases} x=\sqrt[3]{x^3}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 & ; x\geq 0 \\ x=-\sqrt[3]{-x^3}=\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 & ; x\leq 0\end{cases}$.

*) $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ 　 $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

$a-b=\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

j) ليكن a و b من IR_+^* و r و r' من $\mathbb{Q}$

$a^r\cdot a^{r'}=a^{r+r'}$ 　 $\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$

$\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ 　 $(ab)^r=a^r\cdot b^r$

$\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$ 　 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

المتتاليات العددية

I) عموميات.

1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$:

$$U : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n \in I)\ U_n \le M$.

b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n \in I)\ U_n \ge m$.

c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n \in I) : m \le u_n \le M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وجد $k \ge 0$ بحيث $(\forall n \in I) : |U_n| \le k$

3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$:

a) تزايدية إذا وفقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ U_n \le U_{n+1}$.

b) تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ U_n \langle U_{n+1}$.

c) تناقصية إذا وفقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ U_n \ge U_{n+1}$.

d) تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ U_n \rangle U_{n+1}$.

e) ثابتة إذا وفقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ U_n = U_{n+1}$.

ملاحظات:

1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $p \langle n \Rightarrow u_p \le u_n$.

2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $p \langle n \Rightarrow u_p \ge u_n$.

3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة $u_{n+1} - u_n$.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \ge 0$ فإن (U_n) تزايدية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \rangle 0$ فإن (U_n) تزايدية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \le 0$ فإن (U_n) تناقصية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \langle 0$ فإن (U_n) تناقصية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II) المتتالية الحسابية

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r

بحيث $(\forall n \in \mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$ ونجد $u_{n+1} - u_n = cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

c) تكون الأعداد و و في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة المتتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$ يعني $\frac{a+b}{2} = b$.

2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N})\ \boxed{U_n = U_0 + nr}$

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو :

$U_n = U_1 + (n-1)r$.

2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو :

$U_n = U_2 + (n-2)r$.

3) بصفة عامة: إذا كان U_n و U_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

(ترتيب n و p غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

1) $u_1 + u_2 + ... + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$.

2) $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$.

3) بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}}\ .$$

III) المتتاليات الهندسية.

1) **تعريف:**

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = q.U_n}$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1} بدلالة U_n ونجد $u_{n+1} = q \cdot u_n$.

c) تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $ac = b^2$.

<u>2) الحد العام:</u>

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$ ؛ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

<u>ملاحظة:</u>

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-p}$

2) بصفة عامة: إذا كان u_n و u_p حدين من متتالية هندسية أساسها q فإن $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

(ترتيب n و p غير مهم).

<u>3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:</u>

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0.

مع $(q \neq 1)$.

$$\boxed{S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

u_0: الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

<u>ملاحظة:</u>

1) إذا كان $q=1$ فإن $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0$

2) $q \neq 1$: $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

IV) نهاية متتالية.

1) $\lim q^n$

$$\boxed{\lim q^n = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 < q < 1 \\ 1 & ; \quad q = 1 \\ +\infty & ; \quad q > 1 \\ \text{غير موجودة} & q \leq -1 \end{cases}}$$

<u>2) مصادق التقارب.</u>

a) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $|U_n - l| \leq V_n$ انطلاقا من صف ما.

$$\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$$

b) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $U_n \leq V_n$ انطلاقا من صف ما

$\lim U_n = +\infty \Rightarrow \lim V_n = +\infty$ و $\lim V_n = -\infty \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

c) لتكن (U_n) و (V_n) و (W_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$ انطلاقا من صف ما.

$$\lim V_n = \lim W_n = l \Rightarrow \lim U_n = l$$

3) نقول إن متتالية (U_n) متقاربة إذا كانت نهايتها عدد حقيقي.
ونقول إنها متباعدة في الحالات الأخرى.

<u>4) التقارب والترتيب.</u>

a) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث $U_n \leq V_n$ (أو $U_n < V_n$) انطلاقا من صف ما إذا كانت (U_n) و (V_n) متقاربتين فإن $\lim U_n \leq \lim V_n$.

b) كل متتالية تزايدية ومكبورة متقاربة.

c) كل متتالية تناقصية ومصغورة متقاربة.

<u>5) المتتاليات الترجعية</u> $U_{n+1} = f(U_n)$

لتكن f دالة معرفة على I ونعتبر المتتالية $\begin{cases} U_0 \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

*) إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

*) إذا كانت f متصلة على I و (U_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق $f(l) = l$

الأعداد العقدية

I) عموميات.

1) a) $\mathbb{C}=\{z=a+ib\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ و } i^2=-1\}$

b) كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=a+ib$ حيث a و $b\in\mathbb{R}$

و i عنصر من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$ $(i\notin\mathbb{R})$

c) *) الكتابة $z=a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد z .

*) العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب $R_{e}(z)=a$

*) العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب $\mathrm{Im}(z)=b$

*) إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$.

*) إذا كان $a=0$ فإن $z=ib\in\mathbb{R}$ ونقول إن z تخيلي صرف.

2) ليكن a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$. و $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boxed{a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases}a=a'\\ b=b'\end{cases}} \qquad \boxed{a+ib=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}}$$

II) مرافق عدد عقدي.

1) تعريف ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و $b\in\mathbb{R}$

نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\bar{z}$ والمعرف بما يلي $\bar{z}=a-ib$.

2) خاصيات.

a) $\bar{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$; $\bar{z}=-z \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

b) $z=z' \Leftrightarrow \bar{z}=\bar{z}'$; $\bar{\bar{z}}=z$

c) $\overline{z\cdot z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{z_1+z_2+....+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+....+\bar{z}_n$

d) $\overline{z\cdot z'}=\bar{z}\cdot\bar{z}'$; $\overline{z_1z_2....z_n}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot....\bar{z}_n$; $\overline{z^n}=\bar{z}^n\ (n\in\mathbb{Z})$

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

f) ليكن $z=x+iy$ لدينا $z+\bar{z}=2x=2R\acute{e}(z)$; $z-\bar{z}=2iy=2i\ \mathrm{Im}(z)$ و $z\bar{z}=x^2+y^2$

III) معيار عدد عقدي

1) تعريف: ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و $b\in\mathbb{R}$

نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$ والمعرف بما يلي: $\boxed{|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}}$

2) خاصيات:

a) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|a|$

إذا كان $z=ib\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|b|$

b) $\boxed{|z|=|\bar{z}|=|-z| \text{ و } |z|^2=z\bar{z}=a^2+b^2}$

c) $\boxed{|z+z'|\le|z|+|z'| \text{ و } |z|=0\Leftrightarrow z=0}$

d) $|z^n|=|z|^n$ و $|zz'|=|z||z'|$; $|z_1z_2....z_n|=|z_1||z_2|....|z_n|$

e) $\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \text{ و } \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}}$

ملاحظة: للحصول على الشكل الجبري لعدد عقدي على شكل كسر نتبع ما يلي:

*) $\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}'}{|z'|^2}}$

*) $\boxed{\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}}$

IV) التمثيل الهندسي لعدد عقدي.

نفترض أن المستوى P منسوب إلى معلم متقاعد ممنظم $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1) تعريف:

a) لكل $M(x,y)$ من P العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب $aff(M)$.

b) لكل $\vec{u}(x,y)$ من $\vec{v}$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$

c) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z في P ونكتب $M(z)$.

d) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z في v_2 ونكتب $\vec{u}(z)$.

ملاحظة: a) $aff(o)=0$. $aff(\vec{e}_1)=1$. $aff(\vec{e}_2)=i$

b)
$$\boxed{\begin{aligned} &z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(x'ox)\\ &z\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[ox)\\ &z\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(x'o]\end{aligned}}$$

c)
$$\boxed{\begin{aligned} &z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(y'oy)\\ &z\in i\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[oy)\\ &z\in i\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(y'o]\end{aligned}}$$

2) خاصيات.

a)
$$\boxed{\begin{aligned} &aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'\\ &aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M)\\ &MM'=|aff(M')-aff(M)|\end{aligned}}$$

b)
$$\boxed{\begin{aligned} &aff(\vec{u})=aff(\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}\\ &aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})\\ &aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u})\\ &\|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|\end{aligned}}$$

c) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)\}$ لدينا

$$\boxed{aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha aff(A)+\beta aff(B))}$$

d) ليكن I منتصف $[AB]$ $\boxed{aff(I)=\frac{1}{2}(aff(A)+aff(B))}$

e) لتكن A و B و C ثلاث نقط الحاقها على التوالي z_c,z_B,z_A

بحيث $A\neq B$ تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}.$$

V) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

1) *) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $M(z)$ نسمي عمدة العدد z كل قياس للزاوية $\left(\vec{e_1},\widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$. ونرمز له $\arg z$

*) $\boxed{\arg z \equiv \left(\vec{e_1},\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]}$

ملاحظة:

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = k\pi$$

$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}+k\pi$$

2) كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $|z|=r$ و $\arg z\equiv\theta[2\pi]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z ونكتب $z=[r,\theta]$ أو $z=re^{i\theta}$.

3) **ملاحظة:** a) $[r,\theta]=[r',\theta'] \Leftrightarrow r=r'$ و $\theta\equiv\theta'[2\pi]$

b) للحصول على الشكل المثلثي للعدد $z=a+ib$ نتبع ما يلي

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta+i\sin\theta)=\left[\sqrt{a^2+b^2},\theta\right]$$

c)

$$\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$$
$$-\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$$
$$-\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)$$
$$\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

4)

$$[r,\theta]\cdot[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$$
$$[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$$
$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$$
$$\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$$
$$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$$

$$\arg(zz')\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$$
$$\arg z^n\equiv n\arg z[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z})\equiv-\arg z[2\pi]$$

$$e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta} \qquad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$

ملاحظة $\quad -1=e^{i\pi} \qquad i=e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5)

$$\left(\vec{e_1},\vec{u}\right)\equiv\arg\left(aff\,(\vec{u})\right)[2\pi]$$
$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)\equiv\arg\left(aff\,(\vec{v})\right)-\arg\left(aff\,(\vec{u})\right)[2\pi]$$

$$\left(\vec{e_1},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$$

ملاحظة:

إذاكان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1,\theta]$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\Rightarrow AC=AB$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv0[2\pi]$$

6) صيغة Moivre

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$$

7) صيغتا Euler

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \qquad e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$
$$\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) \qquad e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$$

ملاحظة: للحصول على الشكل المثلثي لمجموع عددين لهما نفس المعيار هناك طريقتان

الطريقة 1 . نستعمل الصيغ المثلثية .

ليكن $z_1=e^{i\alpha}$ $z_2=e^{i\beta}$

$$z_1+z_2=e^{i\alpha}+e^{i\beta}=\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\beta+i\sin\beta$$
$$=\cos\alpha+\cos\beta+i\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+i\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$z_1-z_2=\cos\alpha-\cos\beta+i\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)$$
$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+i\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

الطريقة 2 . نستعمل الترميز الأسي .

$$z_1+z_2=e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$z_1-z_2=e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

VI) الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم.

1) ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$ نسمي جدر نوني للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^n=Z$.

2) حلول المعادلة $z^n=a$ هي الجذور النونية للعدد a .

3) ليكن $Z=[r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$ الجذور النونية للعدد Z هي الأعداد $z_k=\left[\sqrt[n]{r},\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]/k\in\{0,1,....,n-1\}$ وعددها n

4) الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد $w_k=\left[1,\frac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $k\in\{0,1,...,n-1\}$

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=[r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z. $Z=[r,\theta]=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]^2$

إذن جذري Z هما: $u=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]$ و $-u$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $\boxed{Z=a\in\mathbb{R}_+^*}$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{a}$ و $-u$

2) إذا كان $\boxed{Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=i\sqrt{a}$ و $-u$

3- إذا كان $\boxed{Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1+i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-u$

4) إذا كان $\boxed{Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$ و $-u$

5) إذا كان $\boxed{Z=a+ib}$ مع $(b\neq 0$ و $a\neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z=-3+4i$$

نضع $z=x+iy$ لدينا $z^2=x^2-y^2+2ixy$

و $|z|^2=x^2+y^2$ و $|Z|=5$

$$z^2=Z\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=Z\\|z|^2=|Z|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-3 & (1)\\2xy=4 & (2)\\x^2+y^2=5 & (3)\end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2=2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن (3) − (1) نستنتج أن $2y^2=8$

يعني $y^2=4$

أي $y=2$ أو $y=-2$

ومن خلال (2) لدينا $xy=2\rangle 0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

إذن جذري Z هما $u=1+2i$ و $-u$

VII) المعادلات من الدرجة II:

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z=-\frac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z=\frac{-b+u}{2a}$ و $z=\frac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases}z_1+z_2=\frac{-b}{a}\\z_1z_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'-ac$$

1- إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ المعادلة لها حل وحيد $z=-\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta'\neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1=\frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2=\frac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ'.

دراسة الدوال

I- الاشتقــــــــــــــاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$ ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كان

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$ ونكتب $f'_d(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كان

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$ ونكتب $f'_g(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار x_0 و $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

2) التأويل الهندسي.

a) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى c_f يقبل مماسا (T) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

b) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) على يمين $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $(T_1): y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.

d) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

e) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

f) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

g) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

ملاحظة:

*) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يمر بشكل عادي من النقطة $M(x_0,f(x_0))$ (لا ينكسر).

*) وإذا كانت f غير قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f (ينكسر) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ ويكون زاوية.

3) اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن gof قابلة للاشتقاق على I و

$$\boxed{(\forall x\in I)\quad (gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)}$$

4) اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و

$$\boxed{(\forall x\in J): \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}\ .$$

5) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

1) $(a)'=0$ $(a\in\mathbb{R})$	12) $(f+g)'=f'+g'$
2) $(x)'=1$	13) $(af)'=af'$
3) $(ax)'=a$	14) $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
4) $(x^r)'=rx^{r-1}$ $r\in\mathbb{Q}$	15) $(f^r)'=rf'\cdot f^{r-1}$
5) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	16) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$
6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	17) $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$
7) $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	18) $(\sin x)'=\cos x$
8) $\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{3\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)^2}$	19) $(\cos x)'=-\sin x$
9) $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$	20) $(\tan x)'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
10) $(Arc\tan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	21) $\left(\sin(u(x))\right)'=u'(x)\cos(u(x))$
11) $\left(Arc\tan(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	22) $\left(\cos u(x)\right)'=-u'(x)\sin(u(x))$
23) $\left(\tan(u(x))\right)'=u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$	

ملاحظة:

a) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
الدالة $f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $D_f-\{x/u(x)=0\}$.

b) إذا كانت f دالة تغير الصيغة في x_0 أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في x_0 . يجب دراسة اشتقاق f في x_0 باستعمال معدل التغير.

6) رتابة دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f'(x)\geq 0$.

b) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f'(x)\leq 0$.

c) تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f'(x)=0$.

7) مطارف دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. يكون للدالة f'' مطرافا في x_0 إذا وفقد إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

8) التقعر:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

a) يكون C_f محدبا " $\cup$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\geq 0$.

b) يكون C_f مقعرا " $\cap$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\leq 0$.

9) نقطة انعطاف.

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن $x_0\in I$.
تكون النقطة $M(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

ملاحظة:

a) إذا كانت f تنعدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن النقطة $M(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرك إشارتها.

II- التمثيل المبياني لدالة

1) محور تماثل – مركز تماثل.

a) يكون المستقيم $(\Delta).x=a$ محور تماثل المنبنى C_f إذا وفقط إذا كان: *) لكل x من D_f $2a-x\in D_f$

*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان: *) لكل x من D_f $2a-x\in D$

*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=2b-f(x)$

2) الفروع اللانهائية.

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لا نهائيا إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

b) تصنيف الفروع اللانهائية

1) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty}$
فإن المستقيم $(\Delta):x=a$ مقارب ل C_f بجوار a.

2) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta):y=a$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

3) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞.

b) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

c) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta):y=ax+b$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

ii) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y=ax$ بجوار ∞.

ملاحظة:

يكون المستقيم $(\Delta):y=ax+b$ مقاربا ل C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim(f(x)-(ax+b))=0$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta):y=ax+b$ مقارب أو إذا كانت $f(x)$ تكتب على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$.

3) بعض الملاحظات.

a) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع المستقيم $(\Delta):y=m$.

b) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g.

d) حلول المتراجحة $f(x)\leq g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g.

e) من أجل دراسة وضع C_f بالنسبة للمستقيم $(\Delta):y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة $f(x)-y$

*) إذا كان $f(x)-y\geq 0$ فإن C_f يوجد فوق (Δ).

*) إذا كان $f(x)-y\leq 0$ فإن C_f يوجد تحت (Δ).

الجداء السلمي – الفلكة
الجداء المتجهي

I- الجداء السلمي.

نفترض في كل ما يلي أن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

(1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$

لدينا $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz' \qquad \left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

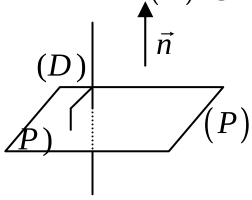
(2) نعتبر النقطتين $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$,

$$\boxed{AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}}$$

(3) **المستقيمات والمستويات في الفضاء الأقليدي.**

a) ليكن $\left(P\right)$ مستوى. نسمي متجهة منظمية على $\left(P\right)$ كل متجهة $\vec{n}$ موجهة لمستقيم $\left(D\right)$ عمودي على $\left(P\right)$.

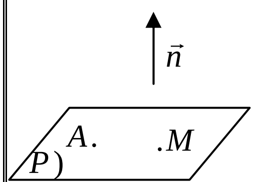


b) نعتبر المستوى $\left(P\right):ax+by+cz+d=0$ المتجهة $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ منظمية على $\left(P\right)$.

c) معادلة مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى $\left(P\right)$ المار من $A\left(1,-1,2\right)$ والمتجهة $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ منظمية عليه:

الطريقة 1: $M\left(x,y,z\right)\in\left(P\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$



$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)+\left(y+1\right)-\left(z-2\right)=0$$

إذن: $\left(P\right):2x+y-z+1=0$

الطريقة 2: لدينا $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ منظمية على $\left(P\right)$ إذن معادلة $\left(P\right)$ على شكل $2x+y-z+1=0$ ولدينا $A\left(1,-1,2\right)\in\left(P\right)$ إذن $2-1-2+d=0$ يعني $d=1$ إذن $\left(P\right):2x+y-z+1=0$.

d) تعامد مستقيمين.

ليكن $\left(D\right)$ و $\left(D'\right)$ مستقيمين موجهين ب $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ و $\vec{v}\left(a',b',c'\right)$ على التوالي:

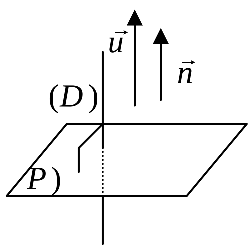
يكون $\left(D\right)\perp\left(D'\right)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $aa'+bb'+cc'=0$.

e) تعامد مستقيم ومستوى.

i) ليكن $\left(D\right)$ مستقيم موجه ب $\vec{u}$ و $\left(P\right)$ مستوى موجه ب $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

يكون $\left(D\right)\perp\left(P\right)$ إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\\vec{u}\perp\vec{w}\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=0\\\vec{u}.\vec{w}=0\end{cases}.$$



ii) ليكن $\left(D\right)$ مستقيم موجه ب $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ و $\left(P\right)$ مستوى بحيث تكون $\vec{n}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ منظمية عليه.

*) يكون $\left(D\right)\perp\left(P\right)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مستقيميتين.

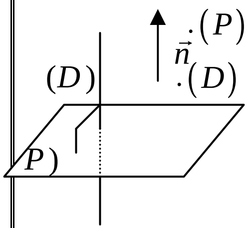
يعني $$\begin{vmatrix}a&\alpha\\b&\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&\alpha\\c&\gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&\beta\\c&\gamma\end{vmatrix}=0$$

*) يكون $\left(D\right)//\left(P\right)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}\perp\vec{n}$ يعني $\vec{u}.\vec{n}=0$

iii) إذا كان المستقيم $\left(D\right)$ عمودي على المستوى $\left(P\right)$ فإن:

*) كل متجهة موجهة ل $\left(D\right)$ تكون منظمية على $\left(P\right)$.

*) وكل متجهة منظمية على $\left(P\right)$ تكون موجهة ل $\left(D\right)$.



f) تعامد مستويين.

i) ليكن $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$ مستويين و $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ منظميتين عليهما على التوالي.

*) يكون $\left(P\right)\perp\left(Q\right)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\perp\vec{n}'$ يعني $\vec{n}.\vec{n}'=0$.

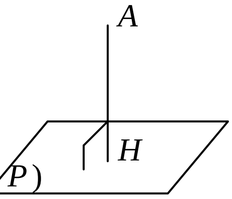
*) يكون $\left(P\right)//\left(Q\right)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ مستقيمين.

ii) نعتبر المستويين $\left(P\right):ax+by+cz+d=0$

و $\left(Q\right):a'x+b'y+c'z+d'=0$

يكون $\left(P\right)\perp\left(Q\right)$ إذا وفقط إذا $aa'+bb'+cc'=0$.

g) مسافة نقطة عن مستوى.



i) ليكن $\left(P\right)$ مستوى و A نقطة من الفضاء

و H المسقط العمودي ل A على $\left(P\right)$

المسافة AH تسمى مسافة A عن $\left(P\right)$

ونكتب $d\left(A,\left(P\right)\right)=AH$.

ii) نعتبر المستوى $\left(P\right):ax+by+cz+d=0$

والنقطة $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

لدينا $$\boxed{d\left(A,\left(P\right)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}.$$

II) الفلكة.

(1) الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة النقط M التي تحقق $\Omega M=r$.

(2) معادلة الفلكة $\left(S\right)$ التي مركزها $\Omega\left(a,b,c\right)$ وشعاعها r هي:

$$\boxed{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=r^2}$$

نقوم بالنشر ونجعل المعادلة على شكل:

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

3) نعتبر المجموعة

$$(\Gamma): x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان.

الطريقة1: نضع $a=\frac{-\alpha}{2}$ $b=\frac{-\beta}{2}$ $c=\frac{-\gamma}{2}$ $d=\delta$ ونحسب $a^2+b^2+c^2-d$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d<0$ فإن $\Gamma=\varnothing$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d=0$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b,c)\}$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d>0$ فإن فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

الطريقة2 نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k$$

باستعمال بداية متطابقة هامة $X^2+\alpha X=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

*) إذا كان $k<0$ فإن $(\Gamma)=\varnothing$

*) إذا كان $k=0$ فإن $(\Gamma)=\{\Omega(a,b,c)\}$

*) إذا كان $k>0$ فإن $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$.

4) **معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.**

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (S) هناك طريقتان:

الطريقة1

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\\z-z_B\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

الطريقة 2:

نستعمل مباشرة الصيغة

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

5) **تقاطع فلكة ومستوى.**

a) لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من أجل دراسة تقاطع (S) و (P) نقوم بحساب $d=d(\Omega,(P))$ وهناك ثلاث حالات:

i) إذا كانت $d>r$ فإن (P) يوجد خارج (S) ((P) لا يقطع (S)).

ii) إذا كان $d=r$ فإن (P) و (S) يتقاطعان في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (P) مماس ل (S) في H ونقط التماس H هي المسقط العمودي ل Ω على (P).

iii) إذا كانت $d<r$ فإن المستوى (P) يقطع (S) وفق الدائرة (ℓ) الموجودة ضمن المستوى (P) التي مركزها هو H المسقط العمودي ل Ω على (P) وشعاعها $r'=\sqrt{r^2-d^2}$.

b) إذا كانت $d(\Omega,(P))$ فإن $\Omega\in(P)$ ونقول في هذه الحالة إن المستوى (P) مستوى قطري. وفي هذه الحالة المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة الكبرى (ℓ) الموجودة ضمن (P) التي مركزها Ω وشعاعها هو r.

c) لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها x.

i) يكون (P) مماسا ل (S) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega,(P))=r$.

ii) يكون (P) مماسا ل (S) في A إذا وفقط إذا كان (ΩA) عمودي على (P) في A.

iii) المستوى المماس للفلكة (S) في A هو المستوى المار من A و $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

6) **تقاطع فلكة ومستقيم:**

نعتبر المستقيم $(D):\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\y=y_0+\beta t\\z=z_0+\gamma t\end{cases}$

والفلكة (S) التي معادلتها:

$$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

من أجل دراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D) نقوم بحل النظمة:

$$\begin{cases}x=x_0+\alpha t\ (1)\\y=y_0+\beta t\ (2)\\z=z_0+\gamma t\ (3)\\x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0\ (4)\end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها t.

ليكن Δ مميز هذه المعادلة:

i) إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة ليس لها حل إذن (D) لا يقطع (S).

ii) إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا إذن (D) يقطع (S) في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (D) مماس ل (S) في H.

iii) إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين t_1 و t_2 إذن (D) يقطع (S) في نقطتين A و B وللحصول على أحداثيات A و B نعوض t_1 و t_2 في (1) و (2) و (3).

III) الجداء المتجهي

1- ليكن $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا.

ونعتبر المتجهتين $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

لدينا $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x&x'\\z&z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}.\vec{k}$

2) تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$

3) a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين موجهتين لمستوى (P) فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منظمية على (P).

b) لتكن A,B,C ثلاث نقط غير مستقيمة (يعني $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq 0$) المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

4) مساحة المثلث (ABC) هي $\boxed{S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

5) مساحة المتوازي أضلاع $(ABCD)$ هي $\boxed{S=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|}$

6) ليكن (D) مستقيم مار من A وموجه بالمتجهة $\vec{u}$ ولتكن M نقطة.

لدينا $\boxed{d(M,(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}}$

7) *) $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

*) $\alpha\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$

*) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

*) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

8) من أجل دراسة تقاطع مستقيم (D) وفلكة (S) يمكن حساب $d(\Omega,(D))$ ثم استنتاج التقاطع.

الدوال اللوغاريتمية والأسية

I) دالة اللوغاريتم النيبري

1) تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم النيبري الدالة الأصلية F للدالة

$$f :]0,+\infty[\to IR$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

والتي تحقق $F(1)=0$ ونرمز لها بـــ $\ln$ أو Log

ملاحظة

a) *) $\ln :]0,+\infty[\to IR$

*) $D_{\ln} =]0,+\infty[$

b) *) نعتبر الدالة $f(x)=\ln(u(x))$

لدينا $x \in D_f \Leftrightarrow u(x)>0$

*) نعتبر الدالة $f(x)=\ln\left|u(x)\right|$

لدينا $x \in D_f \Leftrightarrow u(x) \neq 0$

c) *) $\ln(1)=0$

*) $\ln(e)=1$ (مع $e \simeq 2,71828$)

*) $(\forall r \in Q) : \ln(e^r)=r$

2) خاصيات الدالة $\ln$

ليكن $a>0$ و $b>0$ و $r \in Q$

*) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

*) $\ln(a^r)=r\ln a$

*) $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$

*) $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$

*) $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$

*) $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

ملاحظة :

*) إذاكان $ab>0$ فإن : $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$

*) إذاكان $\frac{a}{b}>0$ فإن : $\ln(\frac{a}{b})=\ln|a|-\ln|b|$

*) إذاكان $a^n>0$ فإن : $\ln(a^n)=n\ln|a|$

3) إشارة $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

4) الإشتقاق

*) $(\forall x>0) \ : (\ln x)'=\frac{1}{x}$

*) $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

*) $(\ln u|x|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

5) النهايات الإعتيادية

a) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ ($\ln(+\infty)=+\infty$)

b) $\lim_{x\to0^+} \ln(x)=-\infty$ ($\ln(0)=-\infty$)

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

d) $\lim_{x\to0^+} x\ln x=0$

e) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}=1$ أو $\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}=1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)\ln(v(x))}{w(x)} \quad \left| \begin{array}{l} v(x)\to+\infty \to \frac{\ln t}{t} \\ v(x)\to 0^+ \to t\ln t \\ v(x)\to a\neq 0 \to \frac{\ln t}{t-1} \end{array} \right.$$

II) دالة الأس النيبري

1) تعريف

نسمي دالة الأس النيبري الدالة العكسية للدلة $\ln$ونرمز لها بالرمز $x \to e^x$

ملاحظة

a) *) الدالة $x \to e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$.

*) $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x>0$

b) *) $e^0=1$ *) $e^1=e$

c) *) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x)=x$

*) $(\forall x>0) : e^{\ln(x)}=x$

d) *) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y>0) \ : e^x=y \Leftrightarrow ln(y)=x$

2) خاصيات

ليكن $x,y \in \mathbb{R}$ و $r \in Q$

*) $e^{x+y}=e^x \cdot e^y$ *) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

*) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ *) $e^{rx}=(e^x)^r$

*) $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$

*) $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

3) الإشتقاق

*) $(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)'=e^x$

*) $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

4 النهايات الإعتيادية

a) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad$ ($e^{+\infty} = +\infty$)

b) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad$ ($e^{-\infty} = 0$)

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)e^{v(x)} - \varphi(x)}{w(x)} \quad \left| \begin{array}{l} v(x) \to +\infty \to \frac{e^t}{t} \\ v(x) \to -\infty \to te^t \\ v(x) \to a \in \mathbb{R} \to \frac{e^t - 1}{t} \end{array} \right.$$

III) دالة اللوغاريتم للأساس a .

1 تعريف

ليكن $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a الدالة التي نرمز لها بـــ $\log_a$ والمعرفة بـــ :

$$(\forall x > 0) : \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

حالات خاصة

*) الدالة $\log_{10}$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بـــالرمز $\log$

$$(\forall x > 0) : \log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

*) دالة اللوغارتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e .

2 خاصيات

*) الدالة $\log_a$ لها نفس خاصيات $\ln$.

*) $\log_a(a) = 1$ $\quad$ *) $\log_a(1) = 0$

*) $\log(10) = 1$ $\quad$ *) $\log(1) = 0$

IV) الأس الحقيقي لعدد حقيقي موجب قطعا

1 تعريف

$$(\forall a > 0)(\forall x \in \mathbb{R}): \ a^x = e^{x\ln(a)}$$

2 خاصيات

ليكن $a > 0$ و $b > 0$ و x و y من $\mathbb{R}$.

*) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $\quad$ *) $a^{xy} = (a^x)^y$

*) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ $\quad$ *) $a^x b^x = (ab)^x$

*) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad$ *) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

*) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

*) $\ln(a^x) = x\ln a$

الإحتمال

I) التعداد

1) رئيسي مجموعة

نسمي رئيسي مجموعة منتهية E عدد عناصرها ، ونرمز له ب $card(E)$

2) عاملي عدد طبيعي

ليكن n عدد طبيعي . نسمي عاملي n ، العدد الذي نرمز له ب $n!$ والمعرف بما يلي :

*) $n! = 1.2.3.......n$ إذا كان $n \neq 0$.

*) $0! = 1$.

3) مبدأ الجداء .

إذا كان علينا أن ننجز p اختيارا ، وكان لدينا :

*) n_1 طريقة للإختيار رقم 1 .

*) n_2 طريقة للإختيار رقم 2 .

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

*) n_p طريقة للإختيار رقم p .

فإن عدد الطرق التي تتم بها هذه الأختيارات هو $n_1.n_2......n_p$.

4) الترتيبات –التبديلات – التاليفات

لتكن $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ مجموعة مكونة من n عنصر . و $p \leq n$.

a) نسمي ترتيبة لــ p عنصر من بين n عناصر E أو ترتيبة من الرتبة p لعناصر E كل ترتيب لــ p عنصر مختلف من E . ونرمز لترتيبة بــ : $(x_1, x_2, ..., x_n)$

b) عدد هذه الترتيبات هو العدد الذي نرمز له بــ : A_n^p والمعرف بمايلي :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2).......(n-p+1)}_{n\ facteurs}$$

c) نسمي تبديلة لعناصر E كل ترتيبة لــ n عنصر من بين n عناصر E

d) عدد هذه التبديلات هو $A_n^n = n(n-1)(n-2)......1 = n!$

e) نسمي تأليفة لــ p عنصر من بين n عناصر E أو تأليفة من الرتبة p لعناصر E كل جزئ مكون من p عنصر مختلف من E . ونرمز لتأليفة بــ : $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$

f) عدد هذه التأليفات هو العدد الذي نرمز له بــ : C_n^p والمعرف بمايلي :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2).......(n-p+1)}^{p\ facteurs}}{p(p-1)(p-2)....................1}$$

5) خاصيات

a) $C_n^p = C_n^{n-p} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \quad C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

b) الصيغة الحدانية . $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

c) لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر .عدد أجزاء E هو 2^n .

II) الإحتمال

1) تعريف .

نعتبر المجموعة $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (كون الإمكانيات)

نقول إننا قد عرفنا احتمالا على Ω إذا وفقط إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد حقيقي p_i بحيث : *) $0 \leq p_i \leq 1$

*) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

ونكتب $p(a_i) = p_i$. الزوج (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا .

2) احتمال حدث :

ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا و A حدثا .

احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الإبتدائية التي تكونه . يعني .

إذا كان $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ فإن $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots p(a_n)$

3) خاصيات

ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا .

a) ليكن A و B حدثين بحيث $A \cap B = \varnothing$ لدينا

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

b) ليكن A و B حدثين . لدينا $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) ليكن A حدثا و $\overline{A}$ الحدث المضاد لــ A ، لدينا $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

d) ليكن A_1 و A_2 و .....و A_n أحداثا منفصلة مثنى مثنى ، لدينا

$$p(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

4) فرضية تساوي الإحتمالات

ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا بحيث يكون لجميع ألإمكانيات نفس الإحتمال

*) جميع الأحداث الإبتدائية لها نفس الإحتمال هو $\frac{1}{card(\Omega)}$

*) ليكن A حدثا . لدينا $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

ملاحظة : **a)** إذا كان لجميع الأحداث الإبتدائية نفس الإحتمال فإن

$$p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

b) إن فرضية تساوي الإحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صريحة أو بطريقة غير مباشرة كما يلي : (نرد غير مغشوش – قطعة نقود غير مغشوشة–كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

c) إذا كانت التجربة مغشوشة يجب أولا حساب احتمال الأحداث الإبتدائية باستعمال المعطيات حول عملية الغش واستعمال الخاصية : إذا كان $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ فإن

$$p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots p(a_n)$$

مثال : نرمي نرد وجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش بحيث الأرقام الزوجية لها نفس الإحتمال والأرقام الفردية لها نفس الإحتمال ، واحتمال رقم زوجي مضاعف احتمال رقم فردي أحسب احتمال الحدث A "الحصول على رقم مضاعف لــ 3 "

الحل : لدينا $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*) لنحسب احتمال الأحداث الإبتدائية .

نضع $p(1) = p(3) = p(5) = x$ و $p(2) = p(4) = p(6) = 2x$

لدينا $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

يعني $x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1$ يعني $x = \frac{1}{9}$ إذن

$$p(1) = p(3) = p(5) = \frac{1}{9} \ , \ p(2) = p(4) = p(6) = \frac{2}{9}$$

*) لدينا $A = \{3, 6\}$ إذن $p(A) = p(3) + p(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

5) ألإحتمال الشرطي :

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A) \neq 0$ ،

أحتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو $p(B/A)=\dfrac{p(A\bigcap B)}{p(A)}$

6) صيغة الإحتمالات المركبة

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$ ،

$$p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$$

7) صيغة الإحتمالات الكلية

a) نقول إن الأحداث A_1 و A_2 و .....و A_n تكون تجزيئا لــ Ω إذا وفقط إذا كان

(* $(\forall i\neq j): A_i\bigcap A_j=\varnothing$ و (* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$.

b) تكون الأحداث A_1 و A_2 و .....و A_n تجزيئا لــ Ω إذا وفقط إذا كانت منفصلة مثنى مثنى وتكون هي الأحداث الممكنة .

c) صيغة الإحتمالات الكلية

ليكن A_1 و A_2 و .....و A_n أحداثا تكون تجزيئا لــ Ω .لكل حدثا B لدينا :

$$p(B)=p(A_1)p(B/A_1)+\cdots+p(A_n)p(B/A_n)$$

8) ألإستقلالية

a) نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا وفقط إذا كان

$$p(A\bigcap B)=p(A).p(B)$$

b) يكون الحدثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان $p(B/A)=p(B)$

و $p(A/B)=p(A)$ يعني إذا كان تحقق أحدهما لا يؤثر على الآخر .

c) نعتبر تجربة مكونة من n اختبار مستقلة مثنى مثنى .

ليكن A حدثا احتمال تحقيقه في اختبار واحد هو $p(A)=p$

وليكن B الحدث :"الحدث A يتحقق k مرة بالضبط خلال n اختبار "

لدينا : $p(B)=C_n^k(p(A))^k(1-p(A))^{n-k}$

ملاحظة بصفة عامة من أجل حساب احتمال نتبع مايلي :

a) إذا كان لدينا السحب التآني أو الإختيار التآني نستعمل C_n^p و $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

b) إذا كانت تجربة مكونة من عدة اختبارات ، نفكك هذه التجربة إلى عدة اختبارات يكون فيها افختيار التآني حتى نتجنب استعمال الترتيبات والتطبيقات . ونرمز لكل إمكانية بــ :

$(x_1,x_2,....,x_n)$ حيث x_i نتيجة التجربة رقم i .

III) المتغير العشوائي .

1) نسمي متغير عشوائي كل تطبيق X يربط كل إمكانية من Ω بعدد حقيقي ، ونرمز للقييم التي يأخذها المتغير X بــ $X(\Omega)$.

2) ليكن X متغير عشوائي بحيث $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....,x_n\}$

نقل إننا قد حددنا قانون احتمل X ، إذا قمنا بحساب $p(X=x_i)$ لكل $i\in\{1,2,...,n\}$ ونلخص هذه النتائج في جدول كما يلي :

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	α_1	α_2	....	α_n

3) الأمل الرياضي .

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بــ $E(X)$ والمعرف بما يلي :

$$E(X)=x_1p(X=x_1)+x_2p(X=x_2)+\cdots+x_np(X=x_n)$$
$$=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots\cdots+x_n\alpha_n$$

4) المغايرة

المغايرة لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بــ $V(X)$ والمعرف بما يلي :

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ حيث

$$E(X^2)=x_1^2p(X=x_1)+x_2^2p(X=x_2)+\cdots+x_n^np(X=x_n)$$
$$x_1^2\alpha_1+x_2^2\alpha_2+\cdots\cdots+x_n^n\alpha_n$$

5) الإنحراف الطرازي .

الإنحراف الطرازي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بــ $\sigma(X)$ والمعرف بما يلي:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

6) دالة التجزيئ

نسمي دالة التجزيئ للمتغير العشوائي X الدالة التي نرمز لها بــ F والمعرفة بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}): F(X)=p(X<x)$$

ونقول إننا قد حددنا الدالة F إذا قمنا بحساب $F(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

مثال : نعتبر الصندوق $U\left|\begin{array}{l}3B\\4N\end{array}\right.$ نسحب تآنيا 3 كرات من الصصندوق . ليكن

X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المحصل عليها .

a) القيم التي بأخذها المتغير X هي :

(* $X=0$ يعني الحصول على $\{3N\}$.

(* $X=1$ يعني الحصول على $\{1B,2N\}$.

(* $X=2$ يعني الحصول على $\{2B,1N\}$.

(* $X=3$ يعني الحصول على $\{3B\}$.

إذن $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

b) قانون احتمال X .

(* $p(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$ (* $p(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$

(* $p(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$ (* $p(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

c) $E(X)=0.\dfrac{4}{35}+1.\dfrac{4}{35}+2.\dfrac{18}{35}+3.\dfrac{1}{35}=\dfrac{49}{35}$

d) لدينا $E(X^2)=0^2.\dfrac{4}{35}+1^2.\dfrac{4}{35}+2^2.\dfrac{18}{35}+3^2.\dfrac{1}{35}=\dfrac{75}{35}$

إذن $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{75}{35}-(\dfrac{49}{35})^2=\dfrac{224}{352}$

e) لدينا $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{224}}{35}$

f) دالة التجزيئ . لنحسب $F(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

(* إذا كان $x\leq 0$ فإن $F(x)=p(X<x)=p(\varnothing)=0$

(* إذا كان $0<x\leq 1$ فإن $F(x)=p(X<x)=p(X=0)=\dfrac{4}{35}$

(* إذا كان $1<x\leq 2$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)=\frac{22}{35}$$

(* إذا كان $2<x\leq 3$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{34}{35}$$

(* إذا كان $3<x$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$$

التكـــــــامـــــل

I) تعــــريـــــف .

لتكن f دالة متصلة على مجال I وليكن a و b من I .

نسمي تكامل f من a إلى b العدد الذي نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$

والمعرف بما يلي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

حيث F دالة أصلية للدالة f .

ملاحظة .

*) نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

*) يمكن تعويض المتغير x بأي متغير آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

II) خـــاصيـــات

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I وليكن a و b و c من I

(1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(3 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

(4 $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(5 $\int_a^b af(x)dx = a\int_a^b f(x)dx$ حيث $a \in IR$.

(6 الدالة $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a .

(7 **a)** إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) : f(x) \ge 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) : f(x) \le 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$

c) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) : f(x) \le g(x)$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

d) إذا كان $a \le b$ و فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(8 **a)** العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة لدالة f بين a و b

b) يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

c) $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ حيث m و M هم القيمة الدنوية والقيمة القصوية للدالة f على $[a,b]$.

ملاحظــــــة في الخاصية (8) ترتيب a و b غير مهم .

III) تقنيات حساب التكــــامـــل .

1) المكاملة بالأجزاء .

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث تكون f' و g' متصلتين على I وليكن a و b من I . لدينا :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

IV) جدول الدوال الأصلية الإعتيادية

الدالة f	دالة أصلية F
0	1
$a \ne 0$	ax
x^r $(r \ne -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$u'u^r$ $(r \ne -1)$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{u'}{u}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
e^x	e^x
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$

الدالة f	دالة أصلية F
$u'e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\arctan(u(x))$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$1+\tan^2(ax+b) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin u(x)$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos u(x)$
$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$	$\tan u(x)$

V) بعض التقنيات

1) $I=\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على $ax+b$

ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$.

2) $I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

a) إذا كان $\Delta<0$ نحدد الشكل القانوني $p(x)=ax^2+bx+c$

نحصل على $I=\int \frac{\alpha}{1+(u(x))^2}dx$ ونضع $t=u(x)$

b) إذا كان $\Delta>0$ نعمل $P(x)$ $p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ثم

نستنتج أن $\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta})$ ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$

c) إذا كان $\Delta=0$

$$I=\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}dx=\int \frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-\alpha}\right]$$

3) $I=\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على ax^2+bx+c ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$ أو $\frac{u'}{1+(u)^2}$.

4) $I=\int P(x)\sqrt[n]{ax+b}\,dx$ أو $I=\int \frac{P(x)}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$

نضع $t=\sqrt[n]{ax+b}$

5) $I=\int P(x)\cos(ax)dx$ أو $I=\int P(x)\sin(ax)dx$ أو

$I=\int P(x)e^{kx}dx$ ← المكاملة بالأجزاء ونضع

$$\begin{cases} f(x)=P(x) \\ g'(x)=\cos(ax)..... \end{cases}$$

6) $I=\int P(x)\cos\ln(x)dx$ أو $I=\int P(x)Arc\tan x\,dx$

← المكاملة بالأجزاء ونضع $\begin{cases} f(x)=\ln x \ \ (ou\ \ \arctan) \\ g'(x)=P(x) \end{cases}$

7) $I=\int e^{kx}\cos(ax)dx \quad I=\int e^{kx}\sin(ax)dx$

← المكاملة بالأجزاء مرتين ونجد $I=A+\alpha I$

8) $I=\int \frac{1}{ae^x+b}dx$.

$$I=\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(ae^x+b)}dx=\int \frac{e^{-x}}{a+be^{-x}}dx=\int \frac{u'}{u}$$

9) $I=\int \frac{(\ln x)^r}{x}dx$

$$I=\int \frac{(\ln x)^r}{x}dx=\int (\ln x)'(\ln x)^r dx=\left[\frac{1}{r+1}(\ln x)^{r+1}\right]$$

10) $I=\int \frac{u(x)v(x)}{(w(x))^n}dx$

← المكاملة بالأجزاء ونضع $\begin{cases} f'(x)=\frac{w'(x)}{(w(x))^n} \\ g(x)=.... \end{cases}$

V) تطبيقات حساب التكامل

1) حساب المساحات

a) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و $(x'Ox)$ و $x=a$ و $x=b$.

مساحة الحيز (E) هي $\text{A(E)}=(\int_a^b |f(x)|dx)\,u.a$

ملاحظة :

*) إذا كانت $f\geq 0$ يعني C_f يوجد فوق محور الأفاصيل فإن $\text{A(E)}=(\int_a^b f(x)\,dx)\,u.a$

*) إذا كانت $f\leq 0$ يعني C_f يوجد تحت محور الأفاصيل فإن $\text{A(E)}=(-\int_a^b f(x)\,dx)\,u.a$.

*) إذا كانت تغير الإشارة مثلا فإن

$\text{A(E)}=\int_a^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^b f(x)\,dx$.

b) لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و C_g و $x=a$ و $x=b$.

مساحة الحيز (E) هي $\text{A(E)}=(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx)\,u.a$

ملاحظة :

*) إذا كانت $f\geq g$ يعني C_f يوجد فوق C_g

فإن $\text{A(E)}=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

*) إذا كانت $f\leq g$ يعني C_f يوجد تحت C_g

فإن $\text{A(E)}=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

*) إذا كان وضع C_f بالنسبة لـ C_g يتغير فإن

$\text{A(E)}=\int_a^\alpha (g(x)-f(x))dx+\int_\alpha^b (f(x)-g(x))dx$

c) إذا كان $\|\vec{i}\|=\alpha cm$ و $\|\vec{j}\|=\beta cm$

فإن وحدة قياس المساحات هو $u.a=\alpha\beta cm^2$

2) حساب الحجوم

a) ليكن (S) مجسما (أنظر الشكل)

وليكن V حجم الجزئ المحصور بـ

(S) و المستويين $z=a$ و $z=b$

إذا كانت الدالة $\begin{array}{l} S:[a,b]\to IR \\ \quad t\ \to S(t) \end{array}$

متصلة على $[a,b]$ فإن $\text{V}=(\int_a^b S(t)\,dx)\,u.v$

($S(t)$ هي مساحة الجزئ تقاطع (S) و المستوى $z=t$)

b) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

إذا دار C_f حول محور الأفاصيل دورة كاملة فإنه يولد مجسما يسمى مجسم دوران ، وحجم هذا المجسم هو

$$V=(\int_a^b \pi(f(x)^2)dx\ )u.v$$